$\boxed{2}$

(1)

$$A=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$B=\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$S=\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)^2$ ，$T=\sum_{k=1}^{n}\{a_k-(n-k+1)\}^2$ より，

$$\begin{aligned}S+T&=\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)^2+\sum_{k=1}^{n}\{a_k-(n-k+1)\}^2\\&=\sum_{k=1}^{n}\left\{2{a_k}^2+2k^2-2(n+1)a_k-2(n+1)k+(n+1)^2\right\}\\&=2\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2+2\sum_{k=1}^{n}k^2-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}a_k-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}(n+1)^2\\&=2\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k^2-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}(n+1)^2\\&=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4(n+1)\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}(n+1)^2\\&=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}-2n(n+1)^2+n(n+1)^2\\&=\frac{2n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)^2}{3}\\&=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}\end{aligned}$$

(2)

$$S=\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)^2$$

$(a_k-k)^2\geq 0$ であり，$a_k=k$ のとき $(a_k-k)^2=0$ だから，

$a_k=k$ のとき，すなわち数列 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-1},a_n\}=\{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$ のとき，

S は最小値 0 をとる。

(3)

(2)と同様に，

$a_k=n-k+1$ のとき，すなわち数列 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-1},a_n\}=\{n,n-1,n-2,\cdots,2,1\}$ のとき，

$T=\sum_{k=1}^{n}\{a_k-(n-k+1)\}^2$ は最小値 0 をとる。

このとき，$S+T=\dfrac{n(n+1)(n-1)}{3}$ より，

S は最大値 $\dfrac{n(n+1)(n-1)}{3}$ をとる。

以上より，

数列 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n\} = \{n, n-1, n-2, \cdots, 2, 1\}$ のとき，

S は最大値 $\dfrac{n(n+1)(n-1)}{3}$ をとる。

(4)

$S = 2$ となる確率は，全順列のうち $S = 2$ となる順列の割合を求めるのと同じ。

***S*=2 となる順列の数について**

$S = \sum_{k=1}^{n} (a_k - k)^2$，$(a_k - k)^2 \geq 0$ より，

$S = 2$ であるための必要十分条件は，

$|a_k - k| \leq 1$ かつ $|a_k - k| = 1$ となる a_k が 2 つ存在することである。

つまり，$|a_k - k| = 1$ となる a_k が 2 つ，それ以外はすべて $|a_k - k| = 0$ であることである。

$S = 0$ のとき，

$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{n-1}, a_n\} = \{1, 2, 3, \cdots, k, k+1, \cdots n-1, n\}$ である。

ここで，$S = 2$ にするために，$a_k = k$ を $a_k = k+1$ に変えると，

$a_{k+1} = k+1$ を $a_{k+1} = k$ にすればよい。

1 から n までの連続した整数では，

連続した 2 つの整数の部分の選び方は，小さい方の数の選び方から $n-1$ 通りある。

よって，

$S = 2$ となる順列の数は $n-1$ 通り

全順列の数について

1 から n までの整数の並べ方の総数だから，n !

以上より，

求める確率は，$\dfrac{n-1}{n!}$